TD Familles sommables

Dénombrabilité

TSU **Exercice 1** Expliciter une injection $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$.

EI8 **Exercice 2** ♣ Montrer que $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{Q}$-ev de dimension infinie.

L0B **Exercice 3** Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties finies d'un ensemble E.

1. Montrer que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ est finie ou dénombrable. On pourra commencer par traiter le cas où les (A_i) sont disjoints.
   Cela reste vrai si les A_i sont dénombrables plutôt que finis.
2. En déduire que $\mathbb{Z}[X]$ est dénombrable.
3. En déduire qu'il existe des nombres réels transcendants, c'est-à-dire des réels qui ne sont racines d'aucun polynôme à coefficients entiers.

KXS **Exercice 4** ★ On considère $G = \{x \in \mathbb{R} \mid \sin(\pi n! x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\}$

1. Montrer que G est un sous-groupe de $\mathbb{R}$.
2. Montrer que tout réel $x \in [0,1[$ peut s'écrire de manière unique $x = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{a_n}{n!}$, avec une suite (a_n) vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \in [\![0, n-1]\!]$ et $\forall n_0, \exists n \geq n_0,\ a_n \neq n-1$.
3. Avec les notations de la question précédente, montrer que $x \in G$ si et seulement si $\min(\frac{a_n}{n}, 1 - \frac{a_n}{n}) \to 0$.
4. En déduire que G est non dénombrable.

MTG **Exercice 5** ★

1. On considère une famille $(S_i)_{i\in I}$ de segments de $\mathbb{R}$, tous disjoints, non vides, et non réduits à un singleton. Montrer que cette famille est au plus dénombrable.
2. On considère des tripodes dans le plan. Un tripode est constitué des 3 segments joignant les sommets d'un triangle équilatéral à son centre. On suppose que les tripodes ne s'intersectent pas. Montrer qu'il y a au plus un nombre dénombrable de tripodes.
3. ★ On appelle triade tout sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ homéomorphe à un tripode. Reprendre la question précédente avec des triades.

Familles positives

7PE **Exercice 6** Sommabilité et somme de $\left(\frac{1}{p^q}\right)_{p,q\geq 2}$.

EGB **Exercice 7** Discuter de la sommabilité de $\left(\frac{1}{(m+n)^\alpha}\right)_{n,m\geq 1}$.

2W4 **Exercice 8** On pose, pour $p, q \geq 1$, $u_{p,q} = \left(\frac{1}{p^2+q^2}\right)^2$.

1. Pour $q \in \mathbb{N}^*$, justifier l'existence de $S_q = \sum_{p=1}^{+\infty} u_{p,q}$.
2. Montrer que, pour $a > 0$, $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(t^2+a^2)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a^3}\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire $\int_0^x \frac{1}{(t^2+a^2)^2}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{1}{a^3}\frac{\pi}{2}$.
   Indication : *Poser $t = a\tan u$.*
3. À l'aide d'une comparaison série intégrale, déterminer un équivalent de S_q.
4. Sommabilité de $(u_{p,q})$?
5. Montrer que la famille $\left(\frac{1}{p^2q^2}\right)_{p,q\geq 1}$ est sommable, et retrouver le résultat précédent directement.

1J0 **Exercice 9** Sommabilité de

1. $\left(\frac{1}{n^{\alpha p}}\right)_{n,p\geq 2}$.
2. $\left(\frac{1}{n^2-m^2}\right)_{\substack{n,m\geq 1\\ n\neq m}}$

0GB **Exercice 10** On admet $\sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et $\sum \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$. Calculer

1. $\sum\limits_{p,q\geq 1} \frac{1}{p^2q^2}$.
2. $\sum\limits_{\substack{p,q\geq 1\\ p\mid q}} \frac{1}{p^2q^2}$
3. ★ $\sum\limits_{\substack{p,q\in\mathbb{N}^*\\ p\wedge q=1}} \frac{1}{p^2q^2}$.

V67 **Exercice 11** Fonction zeta de Riemann On pose $\zeta(x) = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^x}$.

1. Montrer que $\zeta(x)$ est fini si et seulement si $x > 1$.
2. Montrer que $\sum_{n\geq 2} \big(\zeta(n) - 1\big) = 1$.
3. Montrer que $\zeta(x)^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d(n)}{n^x}$, où $d(n)$ est le nombre de diviseurs de n.

PTR **Exercice 12** Soit $\sum a_n$ une série convergente positive, et $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$. Montrer que $\sum na_n$ converge si et seulement si $\sum R_n$ converge, et que $\sum na_n = \sum R_n$.

UTR **Exercice 13** CNS sur α pour que $\left(\frac{1}{p^\alpha+q^\alpha}\right)_{p,q\geq 1}$ soit sommable.

869 **Exercice 14**

1. Existence et valeur de $$\sum_{p,q\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}$$
2. En déduire la valeur de $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{E(\sqrt{n})}{n(n+1)}$.

8A5 **Exercice 15** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $c(n)$ le nombre de uns dans son écriture binaire. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c(n)}{n(n+1)}$

N3U **Exercice 16** ★ Soit A l'ensemble des entiers > 0 dont l'écriture décimale ne contient pas le chiffre 1. Montrer que $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in A}$ est sommable.

MRY **Exercice 17** ★

1. ♣ Que vaut $\sum_{d|n} \varphi(d)$?
2. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varphi(n)}{2^n-1}$.

Indication : *Réduire les fractions* $\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n}{n}$.

Termes quelconques

Q67 **Exercice 18** Montrer que $\left(\frac{\sin(p+q)}{p^2q^2}\right)_{p,q\geq 1}$ est sommable.

JGB **Exercice 19** Montrer que $\left(z^{ij}\right)_{i,j\geq 1}$ est sommable si et seulement si $|z| < 1$.

I3U **Exercice 20** Soient $a \neq b \in \mathbb{C}$. Sommabilité et somme de $\left(\frac{a^pb^q}{(p+q+1)!}\right)_{p,q\geq 0}$.

5ZH **Exercice 21** Montrer que $\left(\frac{e^{2ik\pi/n}}{2^n}\right)_{k\geq 1, n>k}$ est sommable, et calculer sa somme.

WJO **Exercice 22** Soit $x \in \left]-1,1\right[$. On note H_n la série harmonique.

1. Montrer que $\sum H_n x^n$ converge.
2. Calculer sa somme.

CQE **Exercice 23** Déterminer une CNS sur les paramètres pour que la famille soit sommable.

1. $\left(\frac{z^p}{q!}\right)_{p,q\geq 1}$
2. $\left(\frac{a^pb^q}{p!q!}\right)_{p,q\geq 0}$
3. $\left(\binom{p+q}{p}z^{p+q}\right)_{p,q\geq 0}$.

Y9K **Exercice 24**

1. Décomposer en éléments simples $F = \frac{1}{X(X+1)\dots(X+n)}$.
2. En déduire que pour $z \in \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$,
$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{z(z+1)\dots(z+n)} = e\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)}.$$

FX6 **Exercice 25** ★ Soit z_n une suite de complexes vérifiant $\forall n \neq m,\ |z_n - z_m| \geq 1$. Montrer que la série de terme général $\frac{1}{z_n^3}$ converge.

BDY **Exercice 26** Soit $x \in \mathbb{R}$ avec $|x| < 1$. Montrer que

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} d(n)x^n.$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n-1}}{1-x^{2n-1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^{2n}}$
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}} = \frac{x}{1-x}$

MNX **Exercice 27** ★ [ENS 2024]

1. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2^n}}{1-z^{2^{n+1}}} = \frac{z^2}{1-z^2}.$
2. On définit (F_n) par $F_0 = 0,\ F_1 = 1,\ \forall n \geq 2,\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{F_{2^k}}$.
3. ★ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_{n!}}$ est-il algébrique ? **Ind** : *Écrire les sommes partielles comme des rationnels, avec un dénominateur pas trop grand.*

Produits

9M1 **Exercice 28** Soient $a, b > 0$. Sommabilité et somme de $\left(e^{-ap-bq}\right)_{p,q\in\mathbb{N}}$.

RJO **Exercice 29** Pour $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < 1$, montrer que $\displaystyle\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)z^n.$

KTR **Exercice 30** Soit $|z| < 1$ et $p \in \mathbb{N}$. Montrer que $\sum_{n\geq 0} \binom{n+p}{p} z^n$ est absolument convergente, de somme $\frac{1}{(1-z)^{p+1}}$.

6CY **Exercice 31** On considère $u_n = v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$, et w_n le produit de Cauchy de (u_n) et (v_n).

1. Convergence de $\sum u_n$?
2. Montrer que $\sum w_n$ diverge grossièrement. Commenter.

FOH **Exercice 32** ★ [Mines 2022] Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $p(n)$ le nombre de triplets $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$ tels que $x + 2y + 3z = n$.

On pose $G\colon t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} p(n)t^n$.

1. Montrer que $G(t)$ est défini pour $|t| < 1$, puis que $G(t) = \frac{1}{(1-t)(1-t^2)(1-t^3)}$.
2. En déduire une expression de $p(n)$, et un équivalent lorsque $n \to +\infty$.

HQE **Exercice 33** ★ On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers.

1. Pour $s > 1$, montrer que $\displaystyle\prod_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{1-p^{-s}} = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}.$
2. En déduire que $\sum_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{p}$ diverge.